I Giochi di Archimede - Soluzioni Biennio

20 novembre 2002

D	D	C	C	B	C	C	C	D	B	B	D	C	B	D	C	D	B	C	A
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1) La risposta è **(D)**. Ogni ruota funge da scorta per un terzo del viaggio. Mentre una ruota è di scorta le altre due compiono l'intero loro percorso.

2) La risposta è **(D)**. Indicando con a e b le due cifre del numero, la catena di operazioni da effettuare può essere espressa nel seguente modo:

$$\left(\frac{(10a+b)+(10b+a)}{a+b}\right)^2 = \left(\frac{11a+11b}{a+b}\right)^2 = \left(\frac{11(a+b)}{a+b}\right)^2 = 11^2 = 121$$

3) La risposta è **(C)**. Ci sono quattro tipologie diverse di mesi: da 28, 29, 30 o 31 giorni. Un mese in qualsiasi tipologia può cominciare con uno dei sette giorni della settimana. Quindi sono possibili sette sole pagine per ogni tipo di mese. Cioè $4 \times 7 = 28$ pagine.

4) La risposta è **(C)**. Indicando con l il lato del quadrato e con r il raggio dei quarti di circonferenza piccoli, il raggio di quelle grandi sarà $l-r$. Il perimetro della figura in grigio sarà quindi

$$2 \times \frac{2\pi r}{4} + 2 \times \frac{2\pi(l-r))}{4} = \pi r + \pi l - \pi r = \pi l\ .$$

Il perimetro del quadrato è $4l$ e il rapporto fra i perimetri è quindi $\frac{\pi}{4}$.

5) La risposta è **(B)**. Il rapporto fra i diametri è inversamente proporzionale alla velocità di rotazione delle ruote. Indicando con d il diametro della seconda puleggia si avrà quindi che

$$100\frac{\text{giri}}{\text{minuto}} \times 5 \text{ cm} = 200\frac{\text{giri}}{\text{minuto}} \times d\ ,$$

da cui $d = 25$ cm.

6) La risposta è **(C)**. Indicando con l la lunghezza del lato del cubo, la superficie totale sarà $6l^2$. La regione ombreggiata è formata da 3 quarti di circonferenze, quindi la sua superficie sarà $3 \times \frac{\pi l^2}{4}$.
Il rapporto sarè quindi $\frac{3 \times \frac{\pi l^2}{4}}{6l^2} = \frac{3\pi}{24} = \frac{\pi}{8}$.

7) La risposta è **(C)**. Se $I(x), CR(x), AL(x)$ sono i predicati "x è un insegnante", "x ha un coniuge ricco" e "x ha un'auto di lusso", l'asserzione del testo diviene

$$\forall x(I(x) \Longrightarrow (AL(x) \Longrightarrow CR(x))),$$

che è ovviamente equivalente a

$$\forall x(I(x) \& AL(x) \Longrightarrow CR(x)),$$

che formalizza l'asserzione **(C)**.
D'altra parte è evidente che l'asserzione del testo non impone a nessuno di possedere auto di lusso (come fanno **(B)** ed **(E)**), né impone ai possessori di auto di lusso di essere insegnanti (come fa **(D)**), e neppure di avere un coniuge ricco se non sono insegnanti (come fa **(A)**).

8) La risposta è **(C)**. Il numero di giorni dopo i quali si ritroveranno a correre insieme è dato dal minimo comune multiplo fra 10, 15 e 14, che è 210. Le tre amiche si ritroveranno a correre insieme dopo 210 giorni, cioè dopo 30 settimane.

9) La risposta è **(D)**. La somma delle età di tutti i giocatori è $22 \times 11 = 242$ anni. Quando il giocatore che è stato espulso esce, la somma delle età diviene $21 \times 10 = 210$ anni. Quindi il giocatore che si è fatto male ha $242 - 210 = 32$ anni.

10) La risposta è **(B)**. Ognuno dei ragazzi stringe la mano a $600-6 = 594$ altri ragazzi. In ogni stretta di mano sono coinvolti 2 ragazzi, quindi il numero delle strette di mano è $\dfrac{600 \times 594}{2} = 178200$.

11) La risposta è **(B)**. $Q\hat{O}R = \frac{1}{3}C\hat{O}B + \frac{1}{3}B\hat{O}A = \frac{1}{3}\left(C\hat{O}A\right) = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

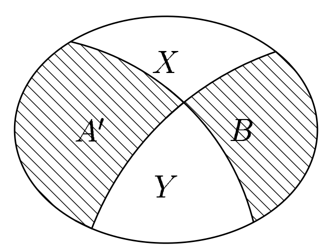
12) La risposta è **(D)**. Infatti 3^{10} non può essere un cubo in quanto 10 non è multiplo di 3, quindi la i) è falsa. Invece la ii) è vera, perché il prodotto di numeri dispari è dispari, e la iii) è vera perchè 10 è pari.

13) La risposta è **(C)**. Indicando con h l'innalzamento del livello dell'acqua, si ha $20\,\text{cm} \times 20\,\text{cm} \times 20\,\text{cm} = 40\,\text{cm} \times 40\,\text{cm} \times h$, da cui $h = 5$ cm, e il livello sarà quindi $(30 + 5)\,\text{cm} = 35\,\text{cm}$.

14) La risposta è **(B)**. Chiaramente non si possono pagare 19 centesimi, perché né 19 né 8 sono multipli di 3. D'altra parte si possono pagare tutti i multipli di 3, tutti i numeri della forma $3k + 1$ che siano maggiori o uguali a 22 e tutti i numeri della forma $3k + 2$ che siano maggiori o uguali a 11. Quindi 19 è proprio il massimo numero escluso.

15) La risposta è **(D)**. Il numero delle zone è infatti $1 + 6 + 12 + 8 = 27$. 1 è il cubo stesso, 6 sono le regioni che "confinano" con una delle 6 facce del cubo, 12 confinano ciascuna con uno degli spigoli e 8 con i vertici.

16) La risposta è **(C)**. Togliamo dal disegno il segmento verticale e indichiamo con A' l'area della figura che si ottiene sulla parte sinistra. Siccome sappiamo che $\text{area}(A') + \text{area}(X) = \text{area}(B) + \text{area}(Y)$ e che $\text{area}(A') + \text{area}(Y) = \text{area}(B) + \text{area}(X)$, ne deduciamo che $\text{area}(A') = \text{area}(B)$. Poiché il segmento verticale taglia la regione indicata con A nel testo, si ha $\text{area}(A) < \text{area}(A')$ e quindi $\text{area}(A) < \text{area}(B)$.



17) La risposta è **(D)**. Se si decide di impiegare un peso da 9 grammi, se ne possono usare 3, 2, oppure 0 da 3 grammi (e, corrispondentemente, 1, 4 oppure 7 da 1 grammo). Se si decide di non impiegare il peso da 9 grammi, se ne possono usare 5, 4, 3, 2, 1, oppure 0 da 3 grammi (e corrispondentemente 1, 4, 7, 10, 13, 16 da 1 grammo). Complessivamente sono $3 + 6 = 9$ modi di scegliere i campioni.

18) La risposta è **(B)**. La successione di salti del canguro è $3 - 1 + 5 - 3 + 7 - 5 + \ldots = (3 - 1) + (5 - 3) + (7 - 5) + \ldots = 3 + (-1 + 5) + (-3 + 7) + (-5 + 9) + \ldots$. Quindi salterà su tutti i gradini pari (precisamente dopo il salto $2k$ si trova sul gradino $2k$), mentre tocca tutti e soli i gradini dispari della forma $4k+3$. (precisamente dopo il salto $1+2k$ si trova sul gradino $3+4k$). Dunque riuscirà a salire fino in cima solo se il gradino pericolante è della forma $4k+1$.

19) La risposta è **(C)**. Il primo e il quarto non possono essere richiusi, il secondo, il terzo e il quinto sì.

20) La risposta è **(A)**. La somma di tutti i pesi è 36 ettogrammi. Se si vuole che la bilancia sia in equilibrio, occorre che la somma dei 5 pesi scelti sia pari, quindi è possibile togliere solo un peso pari. Escludendo il peso da 10 ettogrammi, si dovrebbero porre 13 ettogrammi su ciascun piatto, e questo non può essere realizzato con i 5 pesi rimasti. Escludendo invece il peso da 2 ettogrammi, si dovrebbero porre 17 ettogrammi su ciascun piatto, che si realizza ponendo 3, 5, 9 ettogrammi su un piatto e 7, 10 ettogrammi sull'altro.